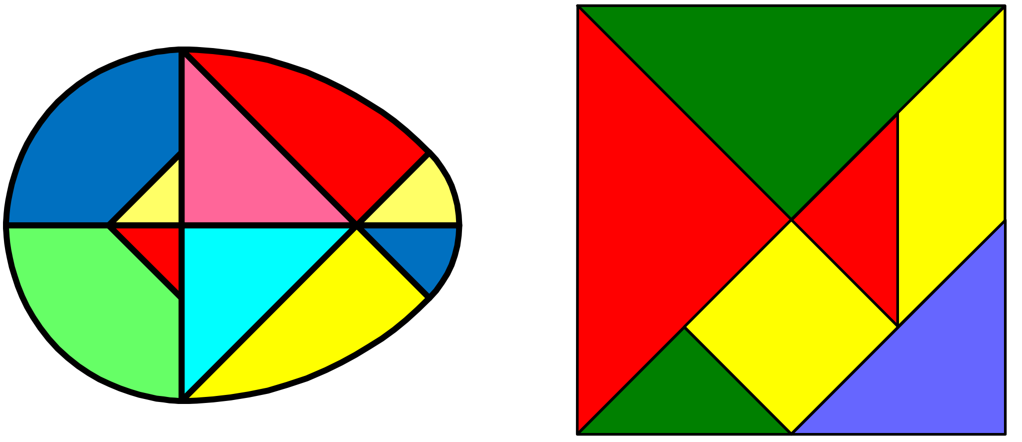


Tangram Mathematik

Wie viele Lösungen hat ein
beliebiges Tangram Legespiel ?

1. Tangrams mit gleich langen Kanten

- Die Anzahl der unterschiedlichen Legemöglichkeiten von Figuren mit jeweils gleicher Kantenlänge, aber unterschiedlicher Kantenanzahl pro Figur ergibt sich aus folgender Ableitung.
- Zwei Figuren mit m bzw, n Kanten ergeben durch Multiplikation insgesamt folgende Lösungsmöglichkeiten:

$$\sum_{i=m}^{n} = m \cdot n \qquad \text{(Gl. 1)}$$

dabei berühren sich jeweils eine Kante in jeder Figur, so daß sich die verbleibende Kantenanzahl der neuen gesamten Figur um 2 reduziert.

d.h. die Kantenanzahl beträgt dann (m+n-2)

- Drei Figuren mit m, n bzw. o Kanten ergeben dann

$$\sum_{i=m}^{o} = m \cdot n \cdot (m+n-2) \cdot o$$

$$\sum_{i=m}^{o} = m \cdot n \cdot o \cdot (m+n-2) \qquad \text{(Gl. 2)}$$

auch hier reduziert sich die Kantenanzahl um weitere 2

auf dann (m+n+o-4) Kanten

- Allgemein ergibt sich somit die Lösung für ein Tangram mit x Figuren

$$\sum_{i=m}^{p,\,q,\,\dots} = n \cdot (m-0) \cdot o \cdot (m+n-2) \cdot p \cdot (m+n+o-4) \cdot q \cdot (m+n+o+p-6) \cdots\cdots \qquad \text{(Gl. 3)}$$

2. Übersicht der Lösungsmöglichkeiten

- 2 Teile A und B mit jeweils i, l Kanten

	A1	A2	A3	A4
B1	1	2	3	4
B2		4	6	8
B3			9	12
B4				16

- 3 Teile A, B und C mit gleich langen Kanten

C1 mit nur einer Kante

	A1	A2	A3	A4
B1	1	2	6	12
B2		8	18	32
B3			36	60
B4				96

C2 mit zwei Kanten

	A1	A2	A3	A4
B1	2	4	12	24
B2		16	36	64
B3			72	120
B4				192

C3 mit drei Kanten

	A1	A2	A3	A4
B1	3	6	18	36
B2		24	54	96
B3			108	180
B4				288

C4 mit vier Kanten

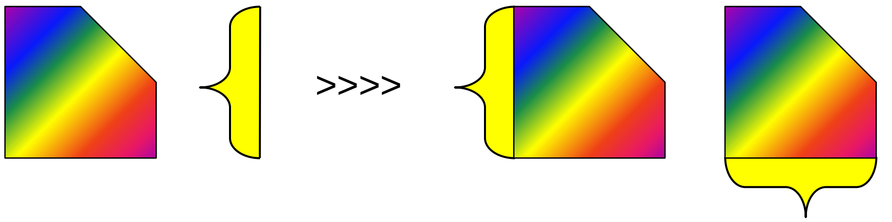
	A1	A2	A3	A4
B1	4	8	24	48
B2		24	72	126
B3			144	240
B4				384

Die Anzahl der Lösungen gem. Gl. 3 ergibt also schon bei sehr wenigen Figuren eine sehr große Lösungsvielfalt.

3. Beispiele

Die Figuren A,B,C, … mit der jeweiligen Kantenanzahl i=1,2,3 … ergeben:

A2 ► B1: gesamte Lösungsanzahl

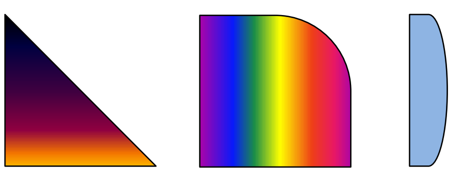


somit insgesamt 2

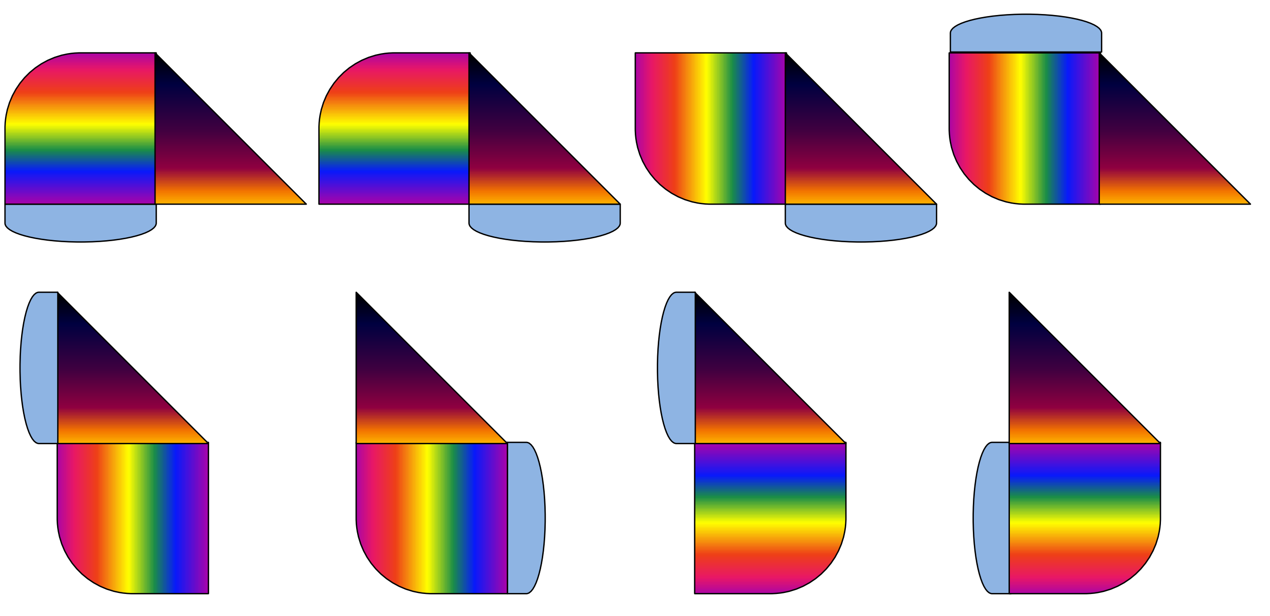
A3 ► B1:

3

A2 ► B2 ► C1 :



diese einfachen Formen ergeben bereits 8 Lösungsmöglichkeiten.

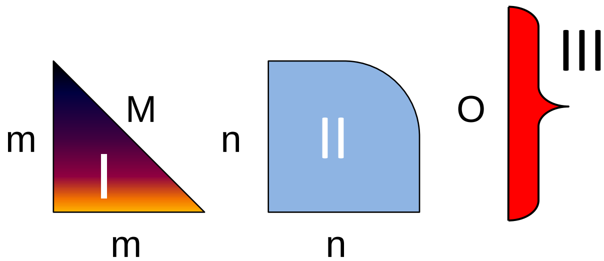


4. Figuren mit unterschiedlichen Kantenlängen

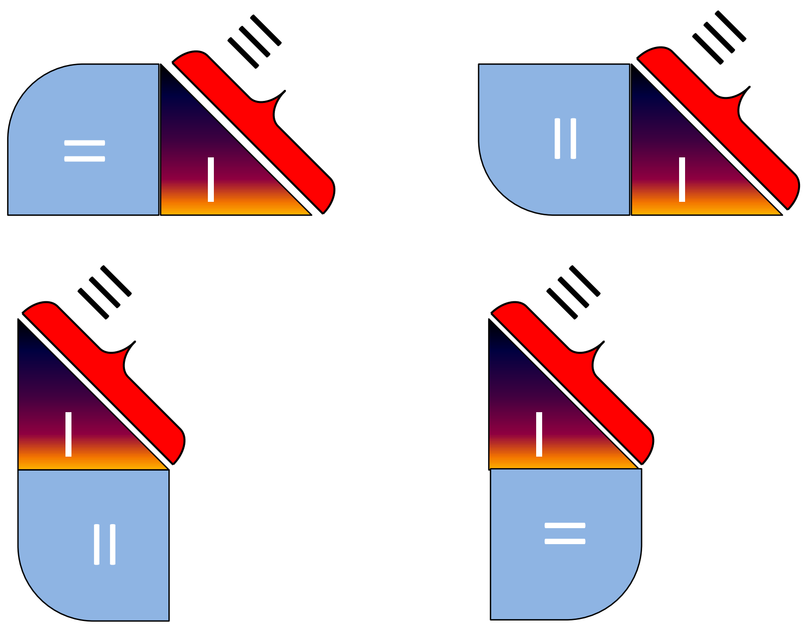
Hierbei werden Figuren mit jeweils unterschiedlichen Kantenlängen an den Kanten aneinander gelegt die gleich lang sind.
Wichtig dabei: Kurze Kanten dürfen nicht an längeren angelegt werden (was bei Tangrams natürlich trotzdem gemacht wird),

z. B. drei Figuren I, II, III mit zwei unterschiedlich langen Kanten

wobei	m, n, o, p, q, …	die erste Kantenlänge ist
	M, N, O, P, Q, …	die zweite Kantenlänge sei, und
	α, β, γ, δ, ε, …	die dritte Kantenlänge bei den Figuren I, II, …



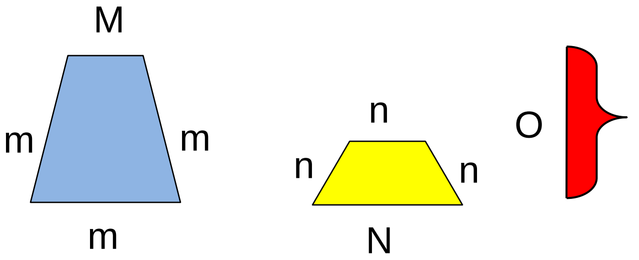
ergeben insgesamt vier Lösungsmöglichkeiten.



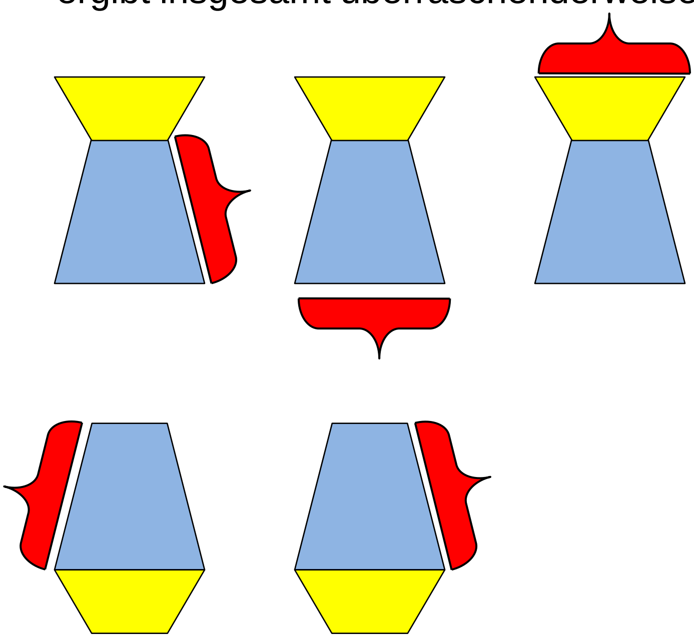
<u>Frage</u>: Gibt es eine einfache Gleichung für den Fall unterschiedlicher Kantenlängen (analog zu Gl. 3) zur Ermittlung aller möglichen zusammen gesetzten Figuren ?

5. Einige einfache Beispiele

- Drei Figuren I, II, III mit zwei Längen



ergibt insgesamt überraschenderweise insgesamt schon 18 Lösungen

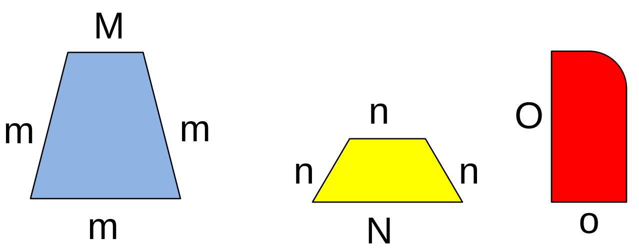


3 x 4 = 12

und weitere

3 x 2 = 6

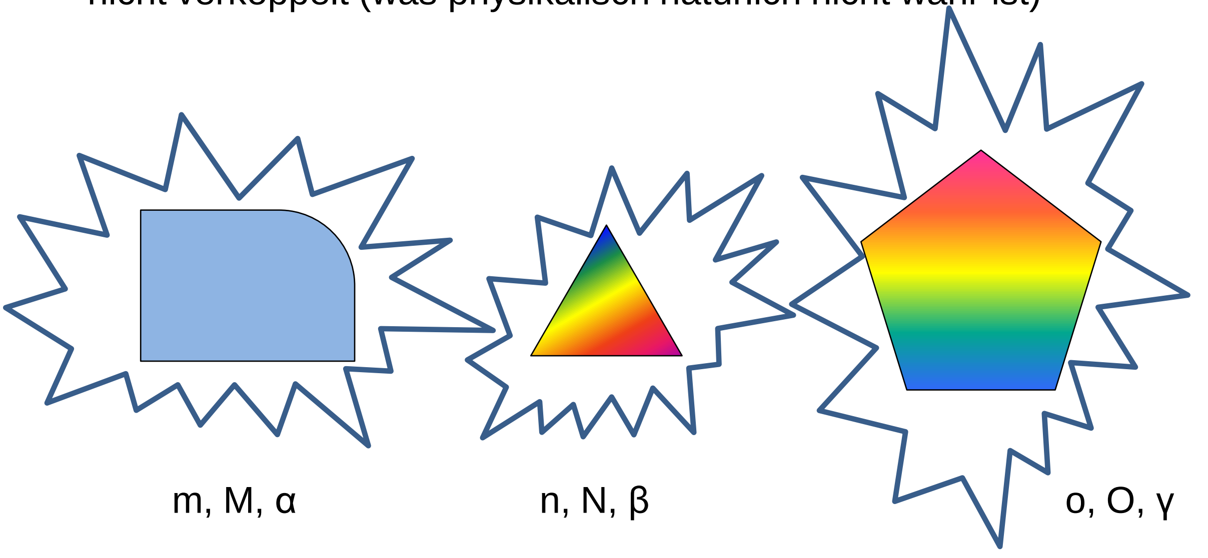
- Drei andere Figuren I, II, III mit zwei Längen



ergibt durch die zwei Kanten des dritten Teils bereits 36 Lösungen.

6. Min/ Max Anzahl bei mehreren Kantenlängen

- Annahme: die Figuren sind durch die Kantenlängen an einer Figur nicht verkoppelt (was physikalisch natürlich nicht wahr ist)



Dann ergibt sich die untere Lösungsvielfalt durch die Multiplikation der Einzellösungen bei jeweils einer Kantenlänge.

Somit

$$\sum_{\text{min}} = \sum_{i=m}^{q,\,\dots} \cdot \sum_{l=M}^{Q,\,\dots} \cdot \sum_{\sigma=\alpha}^{\dots} \qquad \text{(Gl. 4)}$$

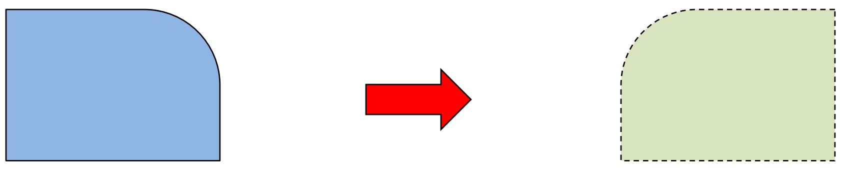
- Die maximale Anzahl ergibt sich unter der Annahme, daß alle Kanten die gleiche Länge hätten und somit maximal verkoppelt sind.

Dann ist die maximale Lösung durch Gl. 3 gegeben

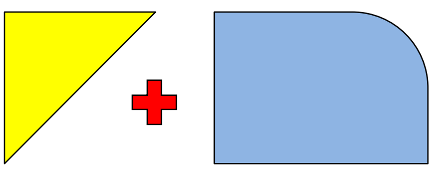
$$\sum_{\text{max}} = \sum_{i=m}^{p,\,q,\,\dots} \qquad \text{(Gl. 5)}$$

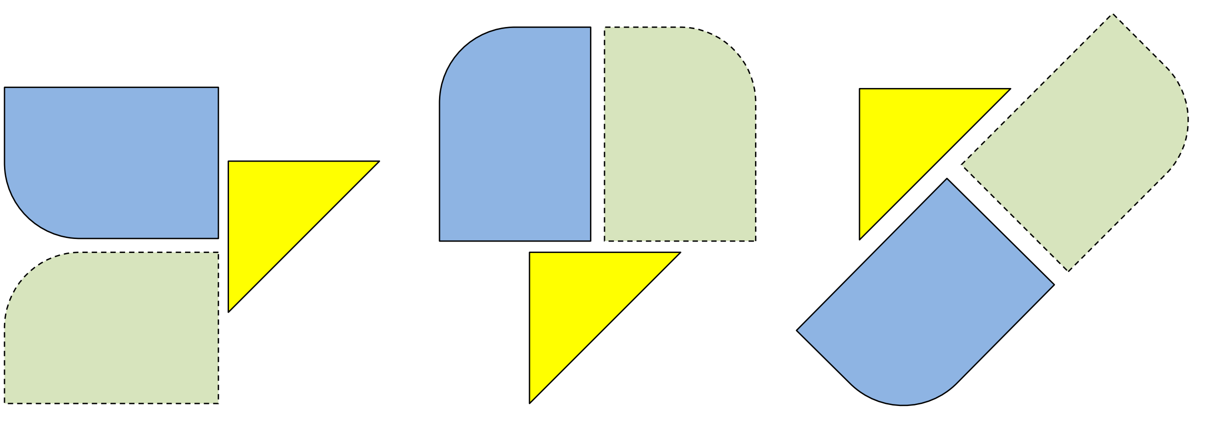
7. Asymmetrische Teile

- Asymmetrische Figuren können im Raum gewendet werden, womit sich die Vielzahl der Lösungen pro Symmetrieachse verdoppelt



- Beispiel: aus bisher drei Lösungen werden jetzt insgesamt 6 Lösungen



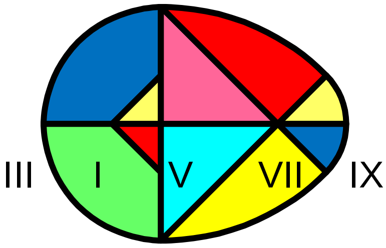


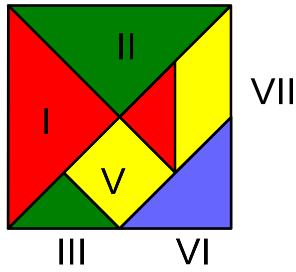
- Die gesamte Anzahl aller Lösungen erhöht sich somit um den Asymmetriefaktor 2·f, wobei n die Anzahl der asymmetrischen Spiegelachsen ist.

$$\sum_{\text{ges}} = 2 \cdot f \sum_{\text{min/max}} \qquad \text{(Gl. 6)}$$

8. Tangram Beispiele

Magisches Ei und Traditionelles chinesisches Tangram





Li	1	√2	2	√8	∑	
I	2	1			3	
II	2	1			3	
III	2	1			3	
IV	2	1			3	
V			2	1	3	
VI			2	1	3	
VII	1			1	2	as
VIII	1			1	2	as
IX	2				2	
X	2				2	

Li	1	√2	2	√8	∑	
I			2	1	3	
II			2	1	3	
III	2	1			3	
IV	2	1			3	
V	4				4	
VI		2	1		3	
VII	2	2			4	as

as: asymmetrisch, d.h. x2

$$\sum_{\text{min}} = 4.096$$

$$\sum_{\text{min}} = 32.768$$

$$\sum_{\text{max}} = 26.754.416.640$$

$$\sum_{\text{max}} = 11.629.440$$

Leider ist die Größenordnung zwischen der minimalen und der maximalen Lösungsvielfalt derart groß, dass man nicht von einem wirklichen Lösung ausgehen kann.

Tangrams sind offensichtlich zu komplex und bedürfen einer jeweils individuellen detailierten Analyse